- Nom : G4 1

- Etablissement : ERRaja

21-12-2016

- ZAhra / Meilouda
- Lalla / LEKhouth
- Selem / Ewva

Exercice Corrigés

Exercice 3

Déterminer la nature du triangle ABC dans chacun des cas suivants:

1) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 2) $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = i$ 3) $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

4) $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = 2i$ 5) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

	Relation Complexe	Nature du triangle ABC	Justification
1	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	équilateral	car $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$
2	$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = i$	rectangle et isocele en B	car le rapport $= \pm i$
3	$\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	équilateral	Car $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
4	$\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = 2i$	rectangle en C	Car imaginaire pur
5	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$	isocele en A	car $\left\lvert \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right\rvert = 1$

• Nom de groupes : G 9
- Lalla LEKhouth
- selem lEwva
Etablissement : ERRaja
- Zahra/Elmeiloude

21-12-2016

- Exercices
- Corrigées

GroupeSC1

Exercice 6

Dans $\mathbb{C}$ on donne : $a=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$

1) Calculer a^2. Donner le module et un argument de a^2.
2) En déduire le module et un argument de a .
3) En déduire $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$.
4) Donner les entiers naturels n tels que a^n soit réel.

- Solution :

1) on a : $a^2=\left[\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right]^2$

$= a^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2} + 2i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2}} - \frac{2+\sqrt{3}}{2}$ $a^2 = \frac{-2\sqrt{3}}{2}+2i\sqrt{\frac{1}{4}}$

$\Rightarrow a^2 = -\sqrt{3}+i$

• Module : $|a^2| = |-\sqrt{3}+i| = \sqrt{3+1} \Rightarrow |a^2| = 2$

• Argument : Soit θ un réel telque $\arg a^2=\theta$

Alors : $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \arg a^2 = \frac{5\pi}{6}$

2.a) Module et argument de a :

• Module : $|a^2| = 2 \Rightarrow |a| = \sqrt{2}$

• Argument : $\arg a^2 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow 2\arg a = \frac{5\pi}{6}+2k\pi$

$\Rightarrow \arg a = \frac{5\pi}{12}+k\pi$, $k\in\{0,1\}$

1

- Soit $k=0 \Rightarrow \arg a = \frac{5\pi}{12}$
- Soit $k=1 \Rightarrow \arg a = \frac{5\pi}{12} + \pi = \frac{17\pi}{12}$

Comme $Re(a)>0$ et $Im(a)>0$, $\arg a \neq \frac{17\pi}{12}$

$\Rightarrow$ Enfin, $\arg a = \frac{5\pi}{12}$

3) D'après ce qui précède, on déduit que :

- $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos \frac{5\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$

- $\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}} = \sin \frac{5\pi}{12} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$

4) Le nombre a^n est réel si et seulement si $\arg a^n = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

$$\arg a^n = k\pi \Rightarrow \frac{5\pi n}{12} = k\pi \Rightarrow 5n = 12k \Rightarrow n = \frac{12k}{5}$$

- n est un entier naturel et le nombre 12 n'est pas divisible par 5.
- donc k est divisible par 5, on prend $k = 5k'$ avec $k' \in \mathbb{R}$

$\arg a^n = k\pi \Rightarrow n = 12 \times \frac{k}{5} \Rightarrow n = 12k'$

- Alors, l'ensemble des valeurs de n tels que a^n soit réel c'est les multiples de 12.

2

Nom : de groupes G_1
- zahra / Mouloud
- Lalls / LEKhauth
- Selem / EWVa
Etablissement : ERRaja

21-12-2016

- Exercice
- Corrigés

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante: $z^{2016} = \overline{z}$

Solution

- On remarque 0 est une Solution de E : (Solution evidente)
- on suppose dans La suite que ($z \neq 0$)

$E \Rightarrow |z^{2016}| = |\overline{z}|$

$\Rightarrow |z|^{2016} = |z|$

$\Rightarrow$ on divise par $|z|$.

$\Rightarrow |z|^{2015} = 1$

$\Rightarrow |z| = 1$ Car $|z| \in \mathbb{R}_+^*$

- On multiplie E par z :

$z \cdot z^{2016} = z \cdot \overline{z}_2 \Rightarrow z^{2017} = z\overline{z}$

or $z\overline{z} = |z|$, donc $\Rightarrow z^{2017} = 1$

racine nième de l'unité $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{2017}}$, $k \in \{0, 1, \ldots, 2016\}$

$z_0 = 1$; $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{2017}} \ldots$

Conclusion : E admet 2018 solution distincts

$S = \{0, z_0, z_1, \ldots, z_{2016}\}$

Nom : de groupe C1
- Zahra Moulouede
- Lalla LEKhouth
- Selem / LEwva

21 _ 12 _ 2016

Exercice Corrigée

Exercice 12

α et x sont deux réels ; et n entier $n \geq 1$.

1) Simplifier les expressions suivantes:

$$C_n = \cos\alpha + \cos(x+\alpha) + \cos(2x+\alpha) + \cdots + \cos(nx+\alpha)$$

$$S_n = \sin\alpha + \sin(x+\alpha) + \sin(2x+\alpha) + \cdots + \sin(nx+\alpha)$$

2) En déduire :

$$C'_n = \cos(x+\alpha) + 2\cos(2x+\alpha) + \cdots + n\cos(nx+\alpha)$$

$$S'_n = \sin(x+\alpha) + 2\sin(2x+\alpha) + \cdots + n\sin(nx+\alpha)$$

Solution

1) $Cn = \cos\alpha + \cos(\alpha+x) + \sin(\alpha+2x) + \ldots + \cos(nx+\alpha)$

$Sn = \sin\alpha + \sin(x+\alpha) + \sin(\alpha+2x) + \ldots + \sin(nx+\alpha)$

$Cn + iSn = (\cos\alpha + i\sin\alpha) + \cos(x+\alpha) + i\sin(x+\alpha) + \ldots +$

$\cos(nx+\alpha) + i\sin(nx+\alpha) = e^{i\alpha} + e^{i(\alpha+n)} + e^{i(\alpha+2n)} + \ldots + e^{i(\alpha+nx)}$

$= e^{i\alpha}[1 + e^{ix} + \ldots + e^{inx}] = e^{i\alpha}\left[\dfrac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right]$

$C'_n = \cos(\alpha+x) + 2\cos(\alpha+2x) + \ldots + n\cos(nx+\alpha)$

2) $e^{ix} + 2e^{i2x} + 3e^{3ix} + \ldots ne^{inx}$

$e^{ix} + e^{i2x} + \ldots + e^{ixn} = Cn + iSn = K_n$

$e^{i3x} + \ldots + e^{inx} = K_n - e^{ix} - e^{i2x}$

e^{ixn} $\quad K_n - K_{n-1}$

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} K_{n-k}$$

• Nom de groupe : Groupe G
• Etablissement : ERRaja

21 - 12 - 2016
- Lalla LEKhouth
- Selem iEwva
- Etablissement : ERRaja

Exercices Corrigées

Exercice 15

Montrer que les points M_1, M_2, M_3 d'affixes z_1, z_2, z_3 sont alignés si et seulement si $z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1} = \overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_3}z_1$.

Solution

$M_1, z_1 \quad M_2(z_2), M_3(z_3)$ sont alignés $\Rightarrow (\overrightarrow{M_3M_1}, \overrightarrow{M_3M_2}) = 0[\pi]$

$\bullet \arg \dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = 0[\pi] \Rightarrow \dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \overline{\left(\dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right)}$

$\bullet \dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \dfrac{\overline{z_2} - \overline{z_3}}{\overline{z_1} - \overline{z_3}} \Leftrightarrow (z_2 - z_3)(\overline{z_1} - \overline{z_3}) = (z_1 - z_3)(\overline{z_2} - \overline{z_3})$

$= z_2\overline{z_1} - z_2\overline{z_3} - z_3\overline{z_1} + z_3\overline{z_3} = z_1\overline{z_2} - z_1\overline{z_3} - z_3\overline{z_2} + z_3\overline{z_3}$

$= \boxed{z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1} = \overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_3}z_1}$

• Nom de groupes : C 1
• Zahra Maouloude
• LalLa lEKhauth
• Selem lEwva
- Etablisement ERRaja

21 - 12 - 2016

Exercices
Corrigées

Exercice 18

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 3 cm).
On désigne par A ; B et C les points d'affixes respectives 1+5i ;-1+i et 3i.
Soit f l'application qui à tout point M du plan P, distinct de C, d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{3iz+6+4i}{z-3i}$. On note f(M)=M'.

1) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z dans les cas suivants :

a) $|z'| = 3$

b) $|z' - 3i| = 3$

c) $z' \in \mathbb{R}$

d) $\arg z' = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

e) $\arg z' = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$.

2) Montrer que les points A ;B ;M et M' sont cocycliques ou alignés .

Solution

1) Ensembles des points :

a) Soit E_1 L'ensemble des points M du plan telque $|z'| = 3$

on a : $|z'| = 3 \Rightarrow \left|\frac{3iz+6+4i}{z-3i}\right| = 3$. Alors $\left|\frac{3i\left[z+\frac{6+4i}{3i}\right]}{z-3i}\right| = 3$

d'ou $|3i|\left|\frac{z+\frac{6+4i}{3i}}{z-3i}\right| = 3 \Rightarrow \left|\frac{z+\frac{4}{3}-2i}{z-3i}\right| = 1$

$\Rightarrow E_1$ donc est la mediatrice du segement $[DC]$ ou $D\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$

b) Soit E_2 l'ensemble des points M du plan telque $|z' - 3i| = 3$, on a

$\Rightarrow |z' - 3i| = 3 \Rightarrow \left|\frac{3iz+6+4i}{z-3i} - 3i\right| = 3 \Leftrightarrow \left|\frac{3iz+6+4i-3iz-9}{z-3i}\right| = 3$

1

$\left|\frac{-3+4i}{z-3i}\right| = 3 \Leftrightarrow \frac{5}{|z-3i|} = 3 \Leftrightarrow |z-3i| = \frac{5}{3}$ soit $|z_M - z_C| = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow E_2$ donc, est le cercle de centre c et de rayon $\frac{5}{3}$

c) Soit E_3 L'ensemble des points M du plan tels que $z' \in \mathbb{R}$. on a:

$z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[z' = 0 \text{ ou } \arg \frac{3iz+6+4i}{z-3i} = 0 \, [\pi] \right]$

Soit $z' = 0 \Leftrightarrow 3iz + 6 + 4i = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{4}{3} + 2i \Leftrightarrow M = D$

$\Rightarrow$ Soit $\arg \frac{3iz+6+4i}{z-3i} = 0 \, [\pi] \Leftrightarrow \arg 3i + \arg \frac{z + \frac{6+4i}{3i}}{z-3i} = 0 \, [\pi]$

$\Leftrightarrow \arg \frac{z + \frac{4}{3} - 2i}{z-3i} = \frac{\pi}{2} \, [\pi] \Leftrightarrow \arg \frac{z_M - z_D}{z_M - z_C} = \frac{\pi}{2} \, [\pi]$

$\Rightarrow \boxed{(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) = \frac{\pi}{2} \, [\pi]}$

M appartient au cercle de diamètre [CD] privée de C et D.

En particulier si M est en D, $z' = 0$

En fin, E_3 est le cercle de diamètre [CD] privée de C et D.

d) Soit E_4 L'ensemble des points M du plan tels que $\arg z' = \frac{\pi}{3} \, [2\pi]$

on a $\arg z' = \frac{\pi}{3} \, [2\pi] \Leftrightarrow \arg 3i + \arg \frac{z + \frac{6+4i}{3i}}{z-3i} = \frac{\pi}{3} \, [2\pi]$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \arg \frac{z + \frac{4}{3} - 2i}{z-3i} = \frac{\pi}{3} \, [2\pi]$

$\Rightarrow \arg \frac{z_M - z_D}{z_M - z_C} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \, [2\pi] \Leftrightarrow \boxed{\arg \frac{z_M - z_D}{z_M - z_C} = -\frac{\pi}{6} \, [2\pi]}$

$\Rightarrow E_4$ donc, est un arc (de sens indirect) d'un cercle d'extrémités C et D exclues.

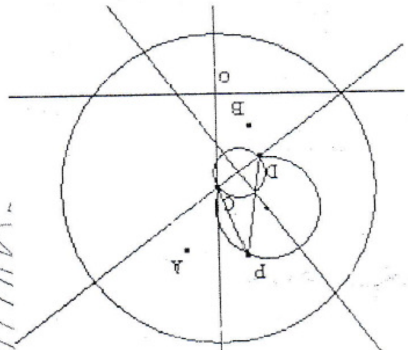
2

c) Soit E_5 l'ensemble des points M du plan tels que

$\arg z' = \frac{\pi}{2} [\pi]$, on a $\arg z' = \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \arg \frac{z+\frac{4}{3}-2i}{z-3i} = \frac{\pi}{2} [\pi]$

$\Rightarrow \arg \frac{z_M - z_D}{z_M - z_C} = 0 [\pi] \Leftrightarrow (\vec{MC}, \vec{MD}) = 0 [\pi]$

E_5 donc est la droite (CD) privée de C et D



2) Pour montrer que les points A, B, M et M' sont cocycliques ou alignés il suffit de montrer que le nombre z tel que $z = \frac{z'-z_A}{z'-z_B} \times \frac{z-z_B}{z-z_A}$ soit réel

on a : $z = \dfrac{\frac{3iz+6+4i}{z-3i} - 1 - 5i}{\frac{3iz+6+4i}{z-3i} - 1 + i} \times \frac{z+1-i}{z-1-5i} \Rightarrow \dfrac{\frac{3iz+6+4i-z+3i-5iz-15}{z-3i}}{\frac{3iz+6+4i+z-3i-iz-3}{z-3i}} \times \frac{z+1-i}{z-1-5i}$

$\Rightarrow z = \frac{-2iz - z + 7i - 9}{2iz + z + i + 3} \times \frac{z+1-i}{z-1-5i} \Rightarrow \frac{(-2i-1)z + 7i - 9}{(2i+1)z + i + 3} \times \frac{z+1-i}{z-1-5i}$

$\Rightarrow z = \dfrac{(-2i-1)\left[z + \frac{7i-9}{-2i-1}\right]}{(2i+1)\left[z + \frac{i+3}{2i+1}\right]} \times \frac{z+1-i}{z-1-5i} \Leftrightarrow z = -\dfrac{\left[z + \frac{7i-9}{-2i-1}\right]}{z + \frac{i+3}{2i+1}} \times \frac{z+1-i}{z-1-5i}$

$\Rightarrow z = \frac{-(z-1-5i)}{z+1-i} \times \frac{z+1-i}{z-1-5i} \Rightarrow z = -1$

d'où $z \in \mathbb{R}$ alors les points A, B, M et M' sont cocycliques ou alignées.

3

- Nom : de groupe C1
- zahra/Mouloude
- Lalla LEkhauth
- Selem LEwva

21-12-2016

Exercice Corrigée

Exercice 21 Bac

1) Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on pose: $P(z)=z^3+(2-2i)z^2+(-2-8i)z-8+4i$.

a) Calculer $P(2i)$.

b) Résoudre l'équation $P(z)=0$.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère la transformation f d'expression : $z'=\frac{1}{3}iz+\frac{2}{3}+2i$.

a) Montrer que f est une similitude directe. Préciser le centre A, le rapport et un angle de f.

b) Calculer l'affixe z_C du point C image de B(-1,-3) par f. Vérifier que le triangle ABC est rectangle. Placer les points A, B et C sur la figure.

c) Calculer l'affixe z_G du point G barycentre du système $S=\{(A,2);(B,3);(C,-1)\}$.

3.a) Déterminer puis construire les trois ensembles Γ_1,Γ_2 et Γ_3 des points M du plan définis par :

$$M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow 2MA^2+3MB^2-MC^2=16$$

$$M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow MB^2-MC^2=16$$

$$M\in\Gamma_3 \Leftrightarrow (2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0$$

b) Que peut-on dire à propos de la position relative des deux ensembles Γ_2 et Γ_3?

Solution

1) $P(Z)=Z^3+(2-2i)Z^2+(-2-8i)Z-8+4i$

a) calcul de $p(2i)$

$p(2i)=(2i)^3+(2-2i)\times(2i)^2+(-2-8i)\times(2i)-8+4i=-8i-8+8i-4i+16-8+4i$

$p(2i)=16-16-8i+8i+4i+4i=0 \Rightarrow p(2i)=0 \Rightarrow \boxed{Z_0=2i}$

b) on Résoudre l'equation $p(Z)=0$

$p(Z)=(Z-Z_0)(Z^2+aZ+b)=0$ $p(Z)=(Z-2i)(Z^2+aZ+b)$

on utilise la TH pour determiner les réels a et b,

TH

	1	2-2i	-2-8i	-8+4i
2i		2i	4i	8-4i
	1	2	-2-4i	0
	Z	a	b	

$\Rightarrow P(Z)=(Z-2i)(Z^2+2Z-2-4i)$

$\Rightarrow P(Z)=(Z-2i)(Z^2+2Z-2-4i)=0$

$P(Z)=0 \Rightarrow (Z-2i)(Z^2+2Z-2-4i)=0$

$\Rightarrow (Z-2i)=0$ ou $Z^2+2Z-2-4i=0$

$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{Z_0=2i} \\ Z^2+2Z-2-4i=0 \\ \Delta=(2)^2-4(-2-4i)\times 1=4+8+16i \\ \Delta=12+16i=4(3+4i)=2^2\times(2+i)^2 \\ =(4+2i)^2 \Rightarrow \boxed{\sqrt{\Delta}=4+2i} \end{cases}$

1

- $z_1 = \frac{-2-4-2i}{2} = -3-i \Rightarrow \boxed{z_1 = -3-i}$
- $z_2 = -\frac{2+4+2i}{2} \Rightarrow \boxed{z_2 = 1+i}$

Donc les solutions de l'équation $p(z)=0$ sont S

$\left\{ z_0 = 2i, z_1 = -3-i, z_2 = 1+i \right\}$

2) $z' = \frac{1}{3} i z + \frac{2}{3} + 2i$

a) f est a la forme $\boxed{z' = az+b}$, tel que $\boxed{a = \frac{1}{3}i}$, $\boxed{b = \frac{2}{3}+2i}$

$a \notin \mathbb{R}$ et $|a| = \frac{1}{3} \neq 1$, Donc f est similitude directe.

A est le centre Donc z_A doit être égal à $\boxed{\frac{b}{1-a}}$

$* z_A = \frac{(\frac{2}{3}+2i) \times (3)}{(1-\frac{1}{3}i)\times(3)} = \frac{(2+6i)\times(3+i)}{(3-i)\times(3+i)} = \frac{6+2i+18i-6}{9+1} = \frac{20i}{10} = 2i$

Donc $\boxed{z_A = 2i}$, Le rapport $\boxed{k = |a| = \frac{1}{3}}$, $\boxed{\theta = \arg a}$

$* \cos\theta = \frac{Re(a)}{|a|} = \frac{0}{\frac{1}{3}} = 0$; $\sin\theta = \frac{Im(a)}{|a|} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1 > 0$

$\Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{2} [2\pi]}$; b) on a, $f(B) = C$ Donc $\boxed{z_C = a z_B + b}$

$\boxed{z_C = \frac{1}{3} i (z_B) + \frac{2}{3} + 2i}$ / $z_B = -1-3i$

$* z_C = \frac{1}{3} i (-1-3i) + \frac{2}{3} + 2i = \frac{1}{3}i + \frac{2}{3} + 2i + \frac{3}{3} = \frac{5}{3} + \frac{6i}{3} - \frac{1}{3}i = \frac{5}{3} + \frac{5}{3}i$

$\boxed{z_C = \frac{5}{3} + \frac{5}{3}i}$ *Mq ABC est rectangle.

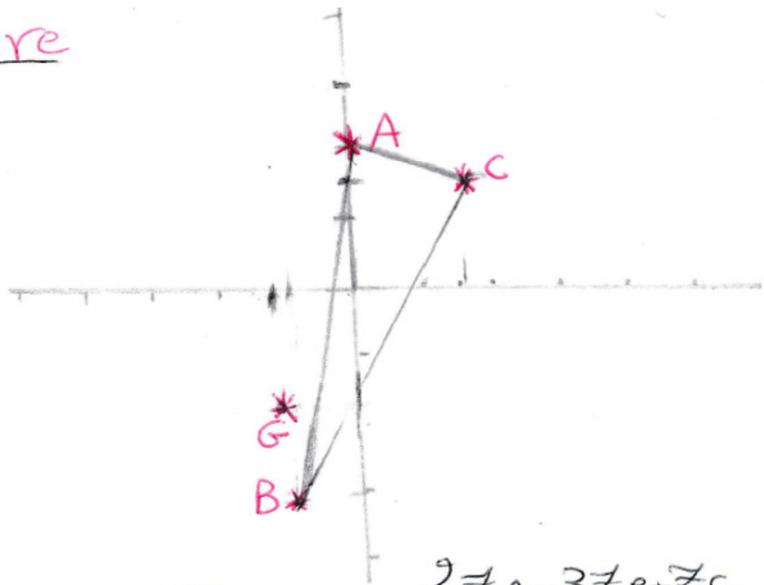
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\frac{5}{3}+\frac{5}{3}i - 2i}{-1-3i-2i} = \frac{\frac{5}{3}+\frac{5}{3}i - \frac{6i}{3}}{-1-5i} = \frac{\frac{5}{3} - \frac{1}{3}i}{-1-5i} = \frac{1}{3}\frac{(5-i)}{(-1-5i)}$

$= \frac{1}{3}\frac{(5-i)\times(i)}{(-1-5i)\times(i)} = \frac{(5-i)\times\frac{1}{3}(i)}{(5-i)} \Rightarrow \boxed{\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{3} i \in i\mathbb{R}}$

$\boxed{\text{Donc le triangle ABC est rectangle en } A}$

2

Voir figure



c) $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|} A & B & C \\ 2 & 3 & -1 \end{array} \Rightarrow Z_G = \dfrac{2Z_A + 3Z_B - Z_C}{}$

$Z_G = \dfrac{4i - 3 - 9 - \frac{5}{3} - \frac{5}{3}i}{4} = \dfrac{\frac{12i}{3} - \frac{27i}{3} - \frac{5}{3}i - \frac{5}{3}}{4} = \dfrac{\left(-\frac{20}{3}i - \frac{14}{3}\right) \times (3)}{(4) \times (3}$

$= \dfrac{-20i - 14}{12} = -\dfrac{20i}{12} - \dfrac{14}{12} = -\dfrac{7}{6} - \dfrac{5i}{3} \Rightarrow \boxed{Z_G = -\frac{7}{6} - \frac{5i}{3}}$

3) a) Γ_1 $2MA^2 + 3MB^2 - MC^2 = 16 \Rightarrow 4MG^2 + f(G) = 16$

$* f(G) = 2GA^2 + 3GB^2 - GC^2$

$* GA^2 = \left(0 + \frac{7}{6}\right)^2 + \left(2 + \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{49}{36} + \frac{121}{9} = \frac{441 + 324}{324} = \frac{765}{324}$

$= \frac{85}{36}$

$* GB^2 = \left(-1 + \frac{7}{6}\right)^2 + \left(-3 + \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{1}{36} + \frac{16}{9} = \frac{9 + 576}{324} = \frac{585}{324} =$

$\frac{65}{36}$

$* GC^2 = \left(\frac{5}{3} + \frac{7}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{3} + \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{100}{9} + \frac{2601}{324} = \frac{100}{9} + \frac{289}{36} =$

$\frac{400}{36} + \frac{289}{36} = \frac{289}{36}$, $MG^2 = \dfrac{16 - f(G)}{4} = \dfrac{-\frac{103}{18} + \frac{16}{1}}{\frac{4}{1}} = \dfrac{\frac{185}{18}}{\frac{4}{1}}$

$MG^2 = \frac{185}{72} = 2{,}56$ Donc Γ_1 est le cercle de centre G et de rayon $\boxed{r = 2{,}56\,m}$

3

- $Z_1 = \frac{-2-4-2i}{2} = -3-i \Rightarrow \boxed{Z_1 = -3-i}$
- $Z_2 = \frac{-2+4+2i}{2} = 1+i \Rightarrow \boxed{Z_2 = 1+i}$

Donc les solutions de l'equation $p(Z)=0$ sont

$S \{ Z_0 = 2i, Z_1 = -3-i, Z_2 = 1+i \}$

2) $\boxed{Z' = \frac{1}{3} i Z + \frac{2}{3} + 2i}$

a) f est a la forme $\boxed{Z' = aZ + b}$, tel que $\boxed{a = \frac{1}{3} i}$, $\boxed{b = \frac{2}{3} + 2i}$

$a \notin \mathbb{R}$ et $|a| = \frac{1}{3} \neq 1$ Donc f est similitude directe.

A est le centre Donc Z_A doit être égal à $\boxed{\frac{b}{1-a}}$

$\boxed{Z_A = \frac{b}{1-a}}$,

$* \; Z_A = \frac{(\frac{2}{3}+2i) \times (3)}{(1-\frac{1}{3}i) \times (3)} = \frac{(2+6i) \times (3+i)}{(3-i) \times (3+i)} = \frac{6+2i+18i-6}{9+1} = \frac{20i}{10} = 2i$

Donc $\boxed{Z_A = 2i}$, Le rapport $\boxed{k = |a| = \frac{1}{3}}$, $\boxed{\theta = \arg a}$

$* \cos\theta = \frac{Re(a)}{|a|} = \frac{0}{\frac{1}{3}} = 0$, $\sin\theta = \frac{Im(a)}{|a|} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1 > 0$

$\Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{2} \; [2\pi]}$; b) on a : $f(B) = C$ Donc $Z_C = \frac{1}{3} i (Z_B) + \frac{2}{3} + 2i$

$/ \boxed{Z_B = -1-3i}$

$* \; Z_C = \frac{1}{3} i (-1-3i) + \frac{2}{3} + 2i = -\frac{1}{3} i + \frac{2}{3} + 2i + \frac{3}{3} = \frac{5}{3} + \frac{6}{3} i - \frac{1}{3} i =$

$= \frac{5}{3} + \frac{5}{3} i$, $\boxed{Z_C = \frac{5}{3} + \frac{5}{3} i}$. Mq ABC est rectangle.

$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{\frac{5}{3} + \frac{5}{3} i - 2i}{-1-3i-2i} = \frac{\frac{5}{3} + \frac{5}{3} i - \frac{6i}{3}}{-1-5i} = \frac{\frac{5}{3} - \frac{1}{3} i}{-1-5i} = \frac{1}{3} \frac{(5-i)}{(-1-5i)}$

$= \frac{1}{3} \frac{(5-i) \times i}{(-1-5i) \times i} = \frac{(5-i)}{(5-i)} \frac{1}{3}(i) \Rightarrow \boxed{\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \left(\frac{1}{3} i\right) \in (i\mathbb{R})}$

4

$\boxed{\text{Donc le triangle ABC est rectangle en A}}$

$\Gamma_2' \Rightarrow MB^2 - MC^2 = 16 \Rightarrow (\vec{MB} + \vec{MC})(\vec{MB} - \vec{MC}) = (4)^2$

on note $I = bar$

B	C
1	1

$\Rightarrow \vec{MB} + \vec{MC} = 2\vec{MI}$

Donc $2\vec{MI} \cdot \vec{CB} = 16$ et Alors $\vec{IM} \cdot \vec{BC} = 8$

Donc Γ_2' est le droite de Vecteur normale $(\vec{BC})$ et passant par (J) tel que $\vec{IJ} = \frac{8}{BC^2} \times \vec{BC}$

$\Gamma_3 \Rightarrow (2\vec{MA} + 3\vec{MB} - \vec{MC}) \cdot (\vec{MB} - \vec{MC}) = 0$

$4\vec{MG} \cdot \vec{CB} = 0 \Rightarrow 4\vec{GM} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow \vec{GM} \cdot \vec{BC} = 0$

Donc M decrit La droite passant par $(G) \perp (\vec{BC})$

5